

# 一类四次哈密尔顿系统的极限环数\*

范兴宇, 黄文韬, 陈爱永

(桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 研究在高次扰动项下的四次哈密尔顿系统, 通过数值方法计算 Abel 积分的零点个数, 得到该系统存在至少 14 个极限环的结论, 这是四次哈密尔顿系统在四次扰动下关于极限环个数的较好结果。

**关键词:** 哈密尔顿系统; 极限环; Abel 积分

**中图分类号:** O1    **文献标志码:** A    **文章编号:** 0529-6579 (2012) 02-0035-05

## The Number of Limit Cycles for a Class of Quartic Hamiltonian System

FAN Xingyu, HUANG Wentao, CHEN Aiyong

(School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract:** The quartic Hamilton system with quartic perturbed terms is studied. By using the accurate method to calculate the number of zeros of Abel integrals of the system, it is obtained that the system has at least 14 limit cycles.

**Key words:** Hamilton system; limit cycle; Abel integrals

确定 Abel 积分的零点个数问题和确定系统在很多项式扰动下的极限环个数密切相关, 称之为弱化的 Hilbert 第十六问题, 近些年来, 对在扰动项下的哈密尔顿 (Hamilton) 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -Hy + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = Hx + \varepsilon g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

的极限环数的研究越来越受到重视<sup>[1-4]</sup>, 其中  $H(x, y), f(x, y), g(x, y)$  为实系统数多项式,  $\deg H(x, y) = n + 1, \deg(f(x, y), g(x, y)) \leq n$ 。对于扰动哈密尔顿 (Hamilton) 系统的极限环个数研究, 可分为两类: 一类是取定较小的  $n$  值, 给出 Abel 积分的零点个数。另一类是固定  $H$ , 而  $f, g$  为任意的  $n$  次扰动。关于系统 (1) 的一些特殊情形的极限环研究成果颇多, 见文 [5-8], 值得一提的是在文 [9] 中, 作者应用分支理论与判定函数得到了  $Z(3, 5) \geq 14$ , 文 [10] 的作者利用定性分析的方法也得到  $Z(3, 2m + 2n) \geq m + n$  的结论。文 [11] 文通过计算系统的 Abel 积分和数值法得

到  $Z(3, 3) \geq 4$ , 本文利用文 [11] 的方法研究下述四次多项式扰动下地四次哈密尔顿 (Hamilton) 系统的极限环个数

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x^3 + (1 - \lambda)x^2 - \lambda x + \varepsilon((\alpha + \beta x + \gamma x^2)y + \delta \frac{\gamma^3}{3} + \rho \frac{x^4}{4}) \end{cases} \quad (2)$$

其中  $x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho \in C, \lambda \in (0, 1)$ , 得到了  $Z(4, 4) \geq 14$ 。

### 1 预备知识

哈密尔顿 (Hamilton) 向量场的扰动系统

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y} + \delta p(x, y, \delta, \mu), \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} + \delta q(x, y, \delta, \mu) \end{aligned} \quad (3)$$

这里变量  $(x, y) \in R^2$ , 小参数  $\delta \in R, 0 < \delta \ll 1, \mu$

\* 收稿日期: 2011-09-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10961011); 广西研究生科研创新资助项目 (2010105950701M30)

作者简介: 范兴宇 (1984 年生), 男, 助教; 通讯作者: 黄文韬; E-mail: huangwentao@163.com

$\in \mathbb{R}^k$ , 二元函数  $H(x, y) \in C^r, r \geq 2$ 。当  $\delta = 0$  时, 则系统 (3) 就为哈密顿 (Hamilton) 系统。设该系统的解轨线中有闭轨线族, 其表达式为:  $\Gamma_h = \{(x, y) \mid H(x, y) = h, h_1 \leq h \leq h_2\}$ 。假定  $\Gamma_h$  关于  $h$  单调排列。对于系统 (3), 定义

$$I(h) = \oint_{\Gamma_h} \left( \frac{\partial H}{\partial x} p + \frac{\partial H}{\partial y} q \right) dt \quad (4)$$

显然, 当时, 沿有, 从而, 系统 (4) 可写为

$$I(h) = \oint_{\Gamma_h} q(x, y, 0, \mu) dx - p(x, y, 0, \mu) dy, h \in \nabla \quad (5)$$

其中  $H(x, y), p(x, y), q(x, y)$  为  $x, y$  的实系统多项式,  $\deg H(x, y) = m + 1$  并且  $\max\{\deg p(x, y), q(x, y)\} \leq n$ , 记  $\nabla$  为使实代数曲线  $H(x, y) = h$  有一个紧分支  $\Gamma_h$  的所有  $h$  的值得集合, 定义函数 (5) 为系统 (3) 的一个 Abel 积分。确定 Abel 积分  $I(h)$  的孤立零点个数, 而此零点与极限环是相互对应的, 从而研究系统的极限环个数可转化为求其 Abel 积分  $I(h)$  的孤立零点个数。

## 2 高次项扰动下的四次哈密顿系统的极限环

在扰动的哈密顿 (Hamilton) 系统 (2) 中,

$$H = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{1 - \lambda}{3} x^3 - \frac{\lambda}{2} x^2 \quad (6)$$

其中  $\lambda \in (0, 1)$ 。针对该系统, 下面我们考虑时的情形即

$$\dot{x} = -Hy = -y, \dot{y} = Hx = x^3 + 0.05x^2 - 0.95x \quad (7)$$

通过计算机软件易得该系统的周期解图像, 见图 1。

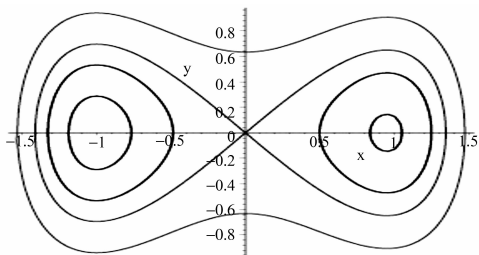


图 1 四次哈密顿系统的周期解

Fig. 1 Periodic solution of the quartic Hamilton system

由系统 (2) 易知

$$f(x, y) = 0,$$

$$g(x, y) = (\alpha + \beta x + \gamma x^2)y + \delta \frac{y^3}{3} + \rho \frac{x^4}{4} \quad (8)$$

从而, 该系统的阿尔贝积分为

$$I(h) = \int_{\gamma_h} f dy - g dx = \int_{\gamma_h} -g dx =$$

$$\int_{D_h} ((\alpha + \beta x + \gamma x^2) + \delta y^2 + \rho x^3) dx \Delta y$$

其扰动函数为  $w = -((\alpha + \beta x + \gamma x^2)y + \delta \frac{y^3}{3} + \rho$

$\frac{x^4}{4}) dx$ , 通过计算该系统的外导数  $dw = ((\alpha + \beta x + \gamma x^2) + \delta y^2 + \rho x^3) dx \Delta y$  使得 Abel 积分为零,  $I(h_1) = \int_{\gamma_{h_1}} w = 0, 1 = 1, \dots, N$ , 进而有  $I_{ij}(h) =$

$\int_{D_h} x^i y^j dx \Delta y$ , 其中  $\partial D_h = \gamma_h$ 。此时 Abel 积分可分解成如下的线性表达式

$$I(h) = \alpha I_{00}(h) + \beta I_{10}(h) + \gamma I_{20}(h) + \delta I_{02}(h) + \rho I_{30}(h) \quad (9)$$

给定参数  $w$  的参数值, 当  $\bar{h}_1 < h_1 < \bar{h}_2 < h_2 < \dots < h_N < \bar{h}_{N+1}$  时, 使得扰动下的哈密顿 (Hamilton) 系统的 Abel 积分的符号改变的次数越多, 则原点处的极限环个数也越多, 以下通过数值对比的方法得到合理的相关数值, 进而得到较好的结果。

**定理 1** 对于系统 (2)  $|_{\lambda=0.95}$ , 若参数  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho$  选择合适的数值, 则当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 系统的 Abel 积分 (9) 有 14 个零点, 即系统至少存在 14 个极限环。

**证明** 证明过程分两个部分。首先, 确定合适的参数  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho)$  的值。先应用文 [11] 的方法, 我们考虑如下线性系统

$$\begin{bmatrix} I_{00}^l(-0.036 2) & I_{10}^l(-0.036 2) & I_{20}^l(-0.036 2) & I_{02}^l(-0.036 2) & I_{30}^l(-0.036 2) \\ I_{00}^l(-0.096 2) & I_{10}^l(-0.096 2) & I_{20}^l(-0.096 2) & I_{02}^l(-0.096 2) & I_{30}^l(-0.096 2) \\ I_{00}^l(-0.120 8) & I_{10}^l(-0.120 8) & I_{20}^l(-0.120 8) & I_{02}^l(-0.120 8) & I_{30}^l(-0.120 8) \\ I_{00}^l(-0.181 2) & I_{10}^l(-0.181 2) & I_{20}^l(-0.181 2) & I_{02}^l(-0.181 2) & I_{30}^l(-0.181 2) \\ I_{00}^l(-0.241 4) & I_{10}^l(-0.241 4) & I_{20}^l(-0.241 4) & I_{02}^l(-0.241 4) & I_{30}^l(-0.241 4) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中  $I_{ij}^l(h)$  和  $I_{ij}^r(h)$  分别代表其积分在区域的左区域、右区域的 Abel 积分值。解上面的线性方程可得其相应的参数值如表 1。

其次, 选用适当的点来导出 Abel 积分的零点个数。利用文 [11] 中的方法, 首先确定系统的 Abel 积分区域  $D_h$ , 寻找合适区域  $B$  覆盖  $D_h$ , 从而将区域  $B$  分为三个部分, 包含在  $D_h$  以内的区域  $(H(x, y)|_{(x, y) \in \mathbb{R}} < h)$ , 在  $D_h$  上的区域  $(H(x, y)|_{(x, y) \in \mathbb{R}} = h)$ , 在  $D_h$  以外的区域  $(H(x, y)|_{(x, y) \in \mathbb{R}} > h)$ ,

表 1 参数值  
Table 1 parameter values

参数	值
$\alpha$	-22 783. 618 5
$\beta$	-9. 609 8 $\times 10^{10}$
$\gamma$	5. 057 8 $\times 10^9$
$\delta$	37 873. 085 6
$\rho$	1. 011 6 $\times 10^{11}$

其次通过合适直线将  $D_h$  分为两个部分，记为左区域  $D'_h$  和右区域  $D''_h$ ，根据文 [11] 的公式计算 Abel 积分，并通过检验判断，若  $H(x,y)|_{(x,y) \in \mathbf{R}} > h$ ，终止计算此区域上的 Abel 积分；若  $H(x,y)|_{(x,y) \in \mathbf{R}} \leq h$ ，通过不断缩小积分区域  $D'_h, D''_h$  和比较  $H(x,y)|_{(x,y) \in \mathbf{R}}$  与  $h$  的关系，最终计算得到精确的  $I'(h), I''(h)$ 。在本文中，我们确定三个临界点  $(-1,0), (0,0), (1,0)$ ，并用  $y$  轴划分积分区域  $D_h$

得到左区域  $D'_h$  和右区域  $D''_h$ ，且  $D'_h = \{(x,y) | x_1 \leq x \leq x_2, -\infty < y < +\infty\}$ ，其中  $x_1, x_2$  是  $H(x,y) - h$  在  $x$  轴左半轴的零点， $D''_h = \{(x,y) | x_3 \leq x \leq x_4, -\infty < y < +\infty\}$ ，其中  $x_3, x_4$  是  $H(x,y) - h$  在  $x$  轴右半轴的零点，故此时左区域上的  $h \in (H(x,y)|_{(x,y)=(-1,0)}, H(x,y)|_{(x,y)=(0,0)})$  即  $h \in (-0.241\ 667, 0)$ ，右区域上的  $h \in (H(x,y)|_{(x,y)=(1,0)}, H(x,y)|_{(x,y)=(0,0)})$  即  $h \in (-0.208\ 33, 0)$ ，通过选取合适的  $h$  值，进而得到 Abel 积分  $I(h)$  在左区域  $D'_h$  和右区域  $D''_h$  上的积分  $I'(h), I''(h)$  的函数图象，通过数值方法最终证明该定理。由 (9) 可知，我们先在左区域上计算  $I'_{00}(h), I'_{10}(h), I'_{20}(h), I'_{02}(h), I'_{30}(h)$ ， $h = -0.128\ 4, -0.112\ 3, -0.078\ 2, -0.063\ 5, -0.040\ 2, -0.035\ 3, -0.025\ 5, -0.020\ 0, -0.029\ 1, -0.028\ 4, -0.028\ 2, -0.027\ 2$  的值见表 2。

表 2 左区域上的积分值  
Table 2 The integral quantity on the left of oval

$h$	$I'_{00}(h)$	$I'_{10}(h)$	$I'_{20}(h)$	$I'_{02}(h)$	$I'_{30}(h)$
-0.128 4	[0.537 3, 0.538 3]	[-0.510 0, -0.509 8]	[0.501 5, 0.501 7]	[0.029 8, 0.031 1]	[-0.509 8, -0.509 4]
-0.112 3	[0.619 5, 0.619 8]	[-0.582 4, -0.582 3]	[0.571 2, 0.571 3]	[0.039 1, 0.039 3]	[-0.581 9, -0.581 8]
-0.078 2	[0.801 2, 0.801 4]	[-0.735 8, -0.735 7]	[0.717 7, 0.717 9]	[0.063 3, 0.063 5]	[-0.735 1, -0.734 9]
-0.063 5	[0.883 5, 0.883 7]	[-0.802 2, -0.802 1]	[0.780 2, 0.780 5]	[0.075 7, 0.075 8]	[-0.801 1, -0.801 0]
-0.040 2	[1.020 9, 1.021 1]	[-0.907 2, -0.907 0]	[0.878 3, 0.878 4]	[0.097 9, 0.098 0]	[-0.905 8, -0.905 6]
-0.035 3	[1.051 2, 1.051 3]	[-0.929 3, -0.929 1]	[0.898 8, 0.898 9]	[0.102 9, 0.103 0]	[-0.927 7, -0.927 6]
-0.025 5	[1.114 0, 1.114 2]	[-0.973 3, -0.973 1]	[0.939 3, 0.939 6]	[0.113 5, 0.113 7]	[-0.971 7, -0.971 6]
-0.020 0	[1.150 9, 1.151 0]	[-0.998 3, -0.998 1]	[0.962 2, 0.962 4]	[0.119 8, 0.110 1]	[-0.996 5, -0.996 3]
-0.029 1	[1.090 7, 1.090 8]	[-0.957 2, -0.957 1]	[0.924 6, 0.924 7]	[0.109 6, 0.109 7]	[-0.955 6, -0.955 5]
-0.028 4	[1.095 2, 1.095 3]	[-0.960 3, -0.960 2]	[0.927 5, 0.927 6]	[0.110 3, 0.110 4]	[-0.958 7, -0.958 6]
-0.028 2	[1.096 5, 1.096 6]	[-0.961 2, -0.961 1]	[0.928 3, 0.928 4]	[0.110 6, 0.110 7]	[-0.959 6, -0.959 5]
-0.027 2	[1.103 0, 1.103 1]	[-0.965 7, -0.965 6]	[0.932 5, 0.932 6]	[0.111 7, 0.111 8]	[-0.964 1, -0.964 0]

再由 (9) 可得  $I'(-0.128\ 4), I'(-0.112\ 3), I'(-0.078\ 2), I'(-0.063\ 5), I'(-0.040\ 2), I'(-0.035\ 3), I'(-0.025\ 5), I'(-0.020\ 0), I'(-0.029\ 1), I'(-0.028\ 4), I'(-0.028\ 2), I'(-0.027\ 2)$  的值，见表 3。将该表的数值反映到函数图象中，见图 2。易见，在左积分区域上是连续的，且至少存在 6 个零点。

表 3  $I'(h)$  的值

Table 3 The values of  $I'(h)$

$I'(h)$	值
$I'(-0.128\ 4)$	[-20.672, -20.664]
$I'(-0.112\ 3)$	[25.865, 25.868]
$I'(-0.078\ 2)$	[112.794, 112.801]
$I'(-0.063\ 5)$	[-203.226, -202.230]
$I'(-0.040\ 2)$	[-11.690, -11.687]
$I'(-0.035\ 3)$	[2.728, 2.730]
$I'(-0.025\ 5)$	[35.274, 35.312]
$I'(-0.020\ 0)$	[-103.610, -103.607]
$I'(-0.029\ 1)$	[1.654, 1.655]
$I'(-0.028\ 4)$	[-0.051, -0.049]
$I'(-0.028\ 2)$	[-0.602, -0.601]
$I'(-0.027\ 2)$	[44.215, 44.216]

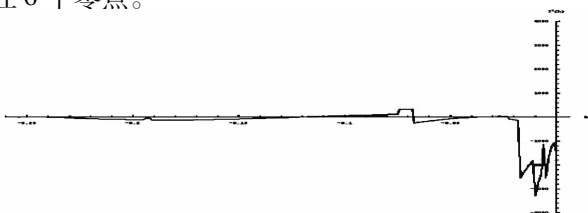


图 2  $I(h)$  在左区域上的图像

Fig. 2 The graphic of  $I(h)$  on the left of oval

同理, 在右区域上计算  $I_{00}(h), I_{10}(h), I_{20}(h), I_{02}(h), I_{30}(h), h = -0.185 6, -0.178 8, -0.175 6, -0.168 8, -0.168 6, -0.162 0, -0.100 0, -0.082 0, -0.062 4, -0.056 8, -0.054 6, -0.051 0, -0.019 8, -0.012 6,$

$-0.006 6, -0.001 8$  的值见表 4, 同样由 (9) 可得表 5, 根据与其相对应的图 3, 显然  $I(h)$  在右积分区域上是连续的, 且至少存在 8 个零点. 综上所述可知, 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时,  $I(h)$  至少存在 14 个零点, 则该系统至少存在 14 个极限环, 故定理得证.

表 4 右区域上的积分值

Table 4 The integral quantity on the right of oval

$h$	$I_{00}(h)$	$I_{10}(h)$	$I_{20}(h)$	$I_{02}(h)$	$I_{30}(h)$
-0.185 6	[0.117 5, 0.117 6]	[0.110 3, 0.110 4]	[0.104 4, 0.104 5]	[0.001 4, 0.001 5]	[0.099 6, 0.099 7]
-0.178 8	[0.149 8, 0.149 9]	[0.140 1, 0.140 2]	[0.132 5, 0.132 6]	[0.002 3, 0.002 4]	[0.126 5, 0.126 6]
-0.175 6	[0.165 0, 0.165 2]	[0.154 2, 0.154 3]	[0.145 7, 0.145 8]	[0.002 8, 0.002 9]	[0.139 2, 0.139 3]
-0.168 8	[0.197 6, 0.197 8]	[0.184 0, 0.184 1]	[0.173 7, 0.173 8]	[0.004 1, 0.004 2]	[0.166 1, 0.166 2]
-0.168 6	[0.198 6, 0.198 7]	[0.184 9, 0.185 0]	[0.174 5, 0.174 6]	[0.004 1, 0.004 3]	[0.166 9, 0.167 1]
-0.162 0	[0.230 4, 0.230 5]	[0.213 8, 0.213 9]	[0.201 6, 0.101 7]	[0.005 5, 0.005 6]	[0.193 0, 0.193 1]
-0.100 0	[0.543 1, 0.543 2]	[0.485 6, 0.485 7]	[0.453 1, 0.453 2]	[0.029 4, 0.029 5]	[0.438 6, 0.438 7]
-0.082 0	[0.639 7, 0.639 8]	[0.564 4, 0.564 5]	[0.524 9, 0.525 0]	[0.040 0, 0.040 1]	[0.510 0, 0.510 1]
-0.062 4	[0.749 1, 0.749 3]	[0.650 3, 0.650 4]	[0.602 5, 0.602 6]	[0.053 6, 0.053 7]	[0.587 7, 0.587 8]
-0.056 8	[0.781 3, 0.781 4]	[0.674 8, 0.674 9]	[0.624 5, 0.624 6]	[0.057 9, 0.058 1]	[0.609 9, 0.610 0]
-0.054 6	[0.794 1, 0.794 2]	[0.684 5, 0.684 6]	[0.633 1, 0.633 2]	[0.059 6, 0.059 7]	[0.618 6, 0.618 7]
-0.051 0	[0.815 3, 0.815 4]	[0.700 2, 0.700 3]	[0.647 2, 0.647 3]	[0.062 5, 0.062 6]	[0.632 9, 0.633 1]
-0.019 8	[1.011 5, 1.011 6]	[0.836 8, 0.836 9]	[0.768 1, 0.768 4]	[0.091 0, 0.091 2]	[0.756 6, 0.756 7]
-0.012 6	[1.062 1, 1.062 3]	[0.868 4, 0.868 5]	[0.795 6, 0.795 7]	[0.098 4, 0.098 5]	[0.785 2, 0.785 3]
-0.006 6	[1.107 4, 1.107 5]	[0.894 6, 0.894 7]	[0.818 4, 0.848 5]	[0.104 9, 0.105 1]	[0.809 0, 0.809 1]
-0.001 8	[1.147 9, 1.148 1]	[0.915 6, 0.915 7]	[0.836 5, 0.836 6]	[0.110 3, 0.110 4]	[0.828 0, 0.828 1]

表 5  $I'(h)$  的值

Table 5 The values of  $I'(h)$

$I'(h)$	值
$I'(-0.185 6)$	[-4.332, -4.325]
$I'(-0.178 8)$	[1.191, 1.123]
$I'(-0.175 6)$	[4.496, 4.501]
$I'(-0.168 8)$	[-44.710, -44.702]
$I'(-0.168 6)$	[-44.793, -44.781]
$I'(-0.162 0)$	[13.188, 13.192]
$I'(-0.100 0)$	[5.215, 5.221]
$I'(-0.082 0)$	[-35.931, -35.926]
$I'(-0.062 4)$	[-299.802, -299.801]
$I'(-0.056 8)$	[77.123, 77.198]
$I'(-0.054 6)$	[38.721, 38.732]
$I'(-0.051 0)$	[-26.321, -26.337]
$I'(-0.019 8)$	[-642.896, -642.893]
$I'(-0.012 6)$	[594.172, 594.174]
$I'(-0.006 6)$	[431.183, 431.196]
$I'(-0.001 8)$	[-869.082, -869.078]

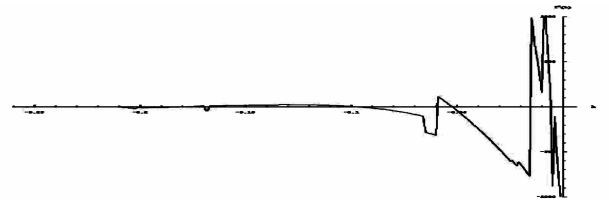


图 3  $I(h)$  在右区域上的图像

Fig. 3 The graphic of  $I(h)$  on the right of oval

参考文献:

[1] CHEN F, LI C, LIBRE J, et al. A unified proof on the weak Hilbert 16th problem for  $n = 2$  [J]. J Diff Equa, 2006, 221(2): 309 - 342.

[2] CHRISTOPHER C, LI C. Limit cycles of differential equations, advanced courses in mathematics [M]. CRM Barcelona Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[3] ECALLE J. Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac [M]. Hermann, Paris, 1992.

[4] ROUSSARIE R. Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem, progress in mathematics [M]. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

- [5] DUMORTIER F, LI C. Perturbations from an elliptic Hamilton of degree of four: (I) saddle loop and two saddle cycle[J]. J Diff Equa, 2001, 176(1): 14 – 157.
- [6] DUMORTIER F, LI C. Perturbations from an elliptic Hamilton of degree of four: (II) cuspidal loop[J]. J Diff Equa, 2001, 175(2): 209 – 243.
- [7] DUMORTIER F, LI C. Perturbations from an elliptic Hamilton of degree of four: (III) global center[J]. J Diff Equa, 2003, 188(2): 473 – 511.
- [8] DUMORTIER F, LI C. Perturbations from an elliptic Hamilton of degree of four: (IV) figure eight – loop[J]. J Diff Equa, 2003, 188(2): 512 – 554.
- [9] ZHOU H X, XU W, LI S, et al. On the number of limit cycles of a cubic polynomials Hamiltonian system under quintic perturbation[J]. Applied Mathematic and Computation, 2007, 190(1): 490 – 499.
- [10] WU C Q, XIA Y H. The number of limit cycle of cubic Hamiltonian system with perturbation[J]. Nonlinear Analysis; Real World Application, 2006, 7: 943 – 949.
- [11] JOHNSON T, TUCKER W. On a computer – aided approach to the computation of Abelian integrals[J]. BIT Numerical Mathematics, 2011, 51: 653 – 667.

~~~~~  
(上接第 21 页)

#### 参考文献:

- [1] VARMM C A, MELO C. Directions in scenario planning literature-A review of the past decades[J]. Futures. 2010, 42(4): 355 – 369.
- [2] MALIZIA A, ONORATI T, DIAZ P, et al. SEMA4A: An ontology for emergency notification systems accessibility[J]. Expert System with Application, 2010, 37(4): 3380 – 3391.
- [3] SANG Tae chung, KWANG Il Kim. Case studies of chemical incidents and emergency information service in Korea[J]. Journal of Loss Prevention in the Process Industries, 2009, 22(4): 361 – 366.
- [4] PENG Y, ZHANG Y. An incident information management framework based on data integration, data mining, and multi-criteria decision making[J]. Decision Support Systems, 2011, 51(2): 316 – 327.
- [5] 毛政利, 朱宝训. 城市应急预案决策支持系统框架研究[J]. 测绘与空间地理信息, 2007, 30(2): 8 – 11.
- [6] 田依林. 城市公共安全应急管理信息系统建设模型[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 29(3): 68 – 71.
- [7] 吴友忠. 基于 Petri 网的公共场所突发事件动态应急处置模型[J]. 城市建设理论研究, 2011, 9(12): 51 – 53.
- [8] 廖光焯, 翁韬, 朱霁平, 等. 城市重大事故应急辅助决策支持系统研究[J]. 中国工程科学, 2005, 7(7): 7 – 13.
- [9] 张发顺, 郭邦梅, 孟志军, 等. 公共安全应急平台中空间数据组织方法研究[J]. 全球定位系统, 2011, 1(1): 42 – 45.
- [10] 郑晓军, 王奕首, 滕弘飞, 等. 应急系统的开发与应用[J]. 计算机应用研究, 2006, 1(1): 33 – 35.
- [11] 雷文章, 陈延兵. 陆地石油企业 HSE 应急预案建立研究[J]. 中国职业安全卫生管理体系认证, 2004, 24(4): 26 – 29.
- [12] 熊苹, 丁明柱, 刘子强. 利用 GIS 技术和 Rs 技术减灾防灾[J]. 测绘与空间地理信息, 2005, 28(6): 7 – 9.
- [13] 徐志胜, 冯凯, 徐亮, 等. 基于 GIS 的城市公共安全应急决策支持系统的研究[J]. 安全与环境学报, 2004, 4(6): 82 – 85.
- [14] 周小成, 焦道振. 基于 GeodataBase 的 CAD 数据到 GIS 的解决方案[J]. 测绘与空间地理信息, 2005, 28(1): 29 – 32.
- [15] 冯凯, 徐志胜, 冯春莹, 等. 小城镇基础设施防灾减灾决策支持系统的研究与开发[J]. 中国安全科学学报, 2004, 14(2): 74 – 77.